楕円曲線上のあるHamilton力学系について(Painleve系, 超幾何系, 漸近解析)

佐々木, 良勝

数理解析研究所講究録
1133 巻 2000 年 43-52

楕円曲線上のある Hamilton 力学系について

佐々木良勝 (東京大学数理科学研究科)

1 Introduction

射影直線 CP^1 上の 2 階線形常微分方程式のモノドロミー保存変形(ホロノミック変形)とパンルヴェ方程式についての一連の研究にひき続き, 岡本和夫氏は 1 9 8 7 年の論文 [Okamoto 1987] において, 楕円曲線 E 上の 2 階線形常微分方程式のモノドロミー保存変形が従うハミルトン力学系を示した. まず, 本稿の出発点となる上記論文の諸結果を以下に述べる.

記号

- Ω を $\mathrm{Im}\frac{\omega_3}{\omega_1} > 0$ なる 2 複素数 $2\omega_1, 2\omega_3$ により生成される格子とする.
- $\wp(x)$ を基本周期 $2\omega_1, 2\omega_3$ をもつワイエルシュトラスの楕円関数とする.
- $\zeta(x)$ をワイエルシュトラスのゼータ関数とする.
- 楕円曲線 E をトーラス C/Ω と同一視することにより, E 上定義された線形常微分方程式を 2 重周期関数係数の方程式として表現する.
- 2 変数関数 $Z(u,v)$ を次のように定める：

$$Z(u,v) \underset{\mathrm{def}}{=} \zeta(u-v)-\zeta(u)+\zeta(v) = \frac{1}{2}\frac{\wp'(u)+\wp'(v)}{\wp(u)-\wp(v).}$$

1.1 E 上フックス型・合流型方程式

次の E 上線形微分方程式を考える:

- フックス型 on E :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = p(x;t)y$$

$$\begin{aligned} p(x;t) &= \nu + a_0\wp(x) + a_1\wp(x-t) + \frac{3}{4}\wp(x-\lambda_1) + \frac{3}{4}\wp(x-\lambda_2) \\ &\quad + HZ(x;t) - \mu_1 Z(x;\lambda_1) - \mu_2 Z(x;\lambda_2). \end{aligned}$$

この方程式は次のリーマン図式をもつ：

$$\begin{bmatrix} x\equiv 0 & x\equiv t & x\equiv \lambda_k & (k=1,2) & mod.\Omega \\ \frac{1}{2}(1+c_0) & \frac{1}{2}(1+c_1) & \frac{3}{2} & & \\ \frac{1}{2}(1-c_0) & \frac{1}{2}(1-c_1) & -\frac{1}{2} & & \end{bmatrix}$$

ただし $a_i = \frac{1}{4}({c_i}^2 - 1)$.

- 合流型 on E：

$$\frac{d^2y}{dx^2} = q(x;t)y$$

$$\begin{aligned} q(x;t) &= \rho + a^2t^2\wp(x)^2 + bt\wp'(x-t) + \frac{3}{4}\wp(x-\lambda_1) + \frac{3}{4}\wp(x-\lambda_2) \\ &\quad + K\wp(x) - \mu_1 Z(x;\lambda_1) - \mu_2 Z(x;\lambda_2). \end{aligned}$$

この方程式は次の (一般化された) リーマン図式をもつ：

$$\begin{bmatrix} \overbrace{\quad x\equiv 0 \quad}^{} & & x\equiv \lambda_k & (k=1,2) & mod.\Omega \\ at & 1+\dfrac{b}{a} & \frac{3}{2} & & \\ -at & 1-\frac{b}{a} & -\frac{1}{2} & & \end{bmatrix}$$

上記において, 特異点の合流"$t\to 0$" により, フックス型の方程式は合流型の方程式に移行する.

1.2 ホロノミック変形・ハミルトン系

モノドロミー保存変形により, 上記 E 上フックス型方程式より次のような独立変数1・自由度2のハミルトン系を得る：

- フックス型 eq. のハミルトン系 (@1)：

$$D\lambda_k = \frac{\partial H}{\partial \mu_k} \quad , D\mu_k = -\frac{\partial H}{\partial \lambda_k} \quad (D = \frac{d}{dt} \quad ; k=1,2)$$

$$H = M\{({\mu_1}^2 - {\mu_2}^2) + (\mu_1+\mu_2)N - P\}$$

where

$$M = \{\zeta(\lambda_1 - t) - \zeta(\lambda_2 - t) - \zeta(\lambda_1) + \zeta(\lambda_2)\}^{-1}$$

$$N = Z(\lambda_1;\lambda_2) = \zeta(\lambda_1-\lambda_2) - \zeta(\lambda_1) + \zeta(\lambda_2)$$

$$P = a_0\{\wp(\lambda_1) - \wp(\lambda_2)\} + a_1\{\wp(\lambda_1 - t) - \wp(\lambda_2 - t)\}.$$

- 合流型 eq. のハミルトン系 (@ 2) :

$$D\lambda_k = \frac{\partial K}{\partial \mu_k} \quad , D\mu_k = -\frac{\partial K}{\partial \lambda_k} \quad (D = t\frac{d}{dt} \quad ; k = 1,2)$$

$$K = \overline{M}\{({\mu_1}^2 - {\mu_2}^2) + (\mu_1 + \mu_2)N - \overline{P}\}$$

where

$$\overline{M} = \{\wp(\lambda_1) - \wp(\lambda_2)\}^{-1}$$

$$N = Z(\lambda_1;\lambda_2) \quad \text{(as above)}$$

$$\overline{P} = a^2t^2\{\wp(\lambda_1)^2 - \wp(\lambda_2)^2\} + bt\{\wp'(\lambda_1) - \wp'(\lambda_2)\}.$$

証明は [Okamoto 1987] を参照されたい. 自由度 1 の場合は see [Kawai 1995].

なお CP^1 上では 1 階微分の項を持つ線形方程式のモノドロミー保存変形と, 1 階微分の項が消えるように標準形にした方程式 (SL-type) のモノドロミー保存変形とは同値であったが, トーラス上ではこの事実は成り立たない.(PSL(2,C) については [Iwasaki 1991] を参照のこと.)

2　特殊解の積分

ハミルトン系 (@ 1) において $\mu_1 = \mu_2 = 0 \quad , a_0 = a_1 = 0$ とおくと,

$$\frac{d\mu_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \lambda_k} \quad (k = 1,2)$$

の方は $0 = 0$ と自明な式となり,

$$\frac{d\lambda_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mu_k} \quad (k = 1,2)$$

の方は

$$(@3): \qquad \frac{d\lambda_1}{dt} = \frac{d\lambda_2}{dt} = MN$$

と1本の式に落ちるが,互いに矛盾する式は出てこない.したがって(@3)の解は(@1)の解において $\mu_1 = \mu_2 = 0$, $a_0 = a_1 = 0$ とした式を満たす.この意味で(@1)は, $\mu_1 = \mu_2 = 0$, $a_0 = a_1 = 0$ なる特殊解をもつ,と言える.

以下,本節においてはハミルトン系(@1),(@2)および,それらにおいてトーラスの周期を無限大に飛ばした場合の極限の系(極限を明示した上で,これらもハミルトン系(@1),(@2)と呼ぶことにする.)の特殊解の積分を求める.なお,本稿を通じ,積分とは各解に沿って一定値をとる関数の謂いである.

まず取り扱う極限についてはっきりさせておこう.考えているトーラスそのものの場合を出発点として 0)elliptic case と呼ぶことにする.基本周期のうち $2\omega_1$ を fix して $2\omega_3 \to \infty$ とした場合を i)trigonometric case と呼ぶ. $2\omega_1 \to \infty, 2\omega_3 \to \infty$ とした場合を ii)rational case と呼ぶ.まとめると次のようになる.

0)elliptic case :	$2\omega_1$:fixed	$2\omega_3$:fixed
i)trigonometric case:	$2\omega_1$:fixed	$2\omega_3 \to \infty$
ii)rational case :	$2\omega_1 \to \infty$	$2\omega_3 \to \infty$.

2.1 ハミルトン系の特解の積分

- フックス型のハミルトン系(@1)の特解の積分

定理 フックス型のハミルトン系(@1)は, $\mu_1 = \mu_2 = 0$, $a_0 = a_1 = 0$ なる特殊解をもつ.これらは各々の場合において以下のような積分をもつ.($\kappa_0, \kappa_1, \kappa_2, c, \gamma, \delta$:const.; これらは moduli に依存する.)

0)elliptic case :

$$e^{\kappa_0 t}\frac{\vartheta_0(x-c)\vartheta_0(y-c)}{\vartheta_0(x+c)\vartheta_0(y+c)} = const. \quad (x = \frac{1}{2\omega_1}(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}), y = t - \frac{1}{2\omega_1}(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}))$$

i)trigonometric case:

$$e^{\kappa_1 t}\frac{(X-\gamma)(Y-\gamma)}{(X-\delta)(Y-\delta)} = const. \quad (X = e^{kx}, Y = e^{ky}; k = \frac{\pi i}{\omega_1})$$

ii)rational case :

$$e^{\kappa_2 t}\frac{(x-c)(y-c)}{(x+c)(y+c)} = const.$$

- 合流型のハミルトン系(@2)の特解の積分

定理　合流型のハミルトン系 (@ 2) は, $\mu_1 = \mu_2 = 0$　, $a = b = 0$ なる特殊解をもつ. これらは各々の場合において以下のような積分をもつ.
($\overline{\kappa}_0, \overline{\kappa}_1, c_j, u, v, \overline{a}$:const.; これらは moduli に依存する.)

0)elliptic case :

$$t^{\overline{\kappa}_0} \frac{\sigma(x-u)\sigma(x+u)}{\sigma(x-v)\sigma(x+v)} = const. \qquad (x = \frac{1}{2\omega_1}(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}))$$

i)trigonometric case:

$$t^{\overline{\kappa}_1} \frac{X - C^{-1}}{X - C} \exp\{\frac{c_1}{X - C^{-1}} + \frac{c_2}{X - C} + \frac{1}{2}\frac{c_3}{(X - C^{-1})^2} + \frac{1}{2}\frac{c_4}{(X - C)^2}\} = const.$$

ii)rational case :

$$t \frac{(y - \overline{a})(y + \overline{a})}{(y - i\sqrt{3}\overline{a})(y + i\sqrt{3}\overline{a})} = const.$$

2.2　求積計算のアウトライン

- Outline

0)elliptic case:

ハミルトン系 (@ 1) および (@ 2) は次のように変形できる :

$$(@1) \xrightarrow[\substack{\mu_1=\mu_2=0 \\ a_0=a_1=0}]{} \frac{dx}{Z(x)} + \frac{dy}{Z(y)} = 0 \quad (x = \frac{\lambda_1+\lambda_2}{2} \quad , y = t - \frac{\lambda_1+\lambda_2}{2})$$

$$(@2) \xrightarrow[\substack{\mu_1=\mu_2=0 \\ a=b=0}]{} \frac{dt}{t} + \frac{\overline{M}dx}{Z(x)} = 0 \qquad (x = \frac{\lambda_1+\lambda_2}{2} \quad , \overline{M} \text{は } x \text{ の関数})$$

where

$$Z(x) \underset{\text{def}}{=} Z(x - c; x + c) \qquad (c = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}\text{:const.}).$$

あとは (@ 1) は第 3 種楕円積分の公式をつかって積分できる. [竹内 1936]
, [安藤 1970] を参照されたい. (@ 2) はもっと簡単に積分できる.

i)trigonometric case, ii)rational case では, 次の退化公式を用いる.

- Formulae

$$\begin{array}{c|c}
\wp(z) = \wp(z;\omega_1,\omega_3) & Z(u;v) = \zeta(u-v) - \zeta(u) + \zeta(v) \\
\Big\downarrow \tau=\frac{\omega_3}{\omega_1}\to\infty & \Big\downarrow \tau=\frac{\omega_3}{\omega_1}\to\infty \\
\wp_{tri}(z) = (\frac{\pi}{2\omega_1})^2\{\frac{1}{\sin^2(\frac{\pi z}{2\omega_1})} - \frac{1}{3}\} & Z_{tri}(u;v) = \frac{\frac{\pi}{2\omega_1}}{\tan\frac{\pi(u-v)}{2\omega_1}} - \frac{\frac{\pi}{2\omega_1}}{\tan\frac{\pi u}{2\omega_1}} + \frac{\frac{\pi}{2\omega_1}}{\tan\frac{\pi v}{2\omega_1}} \\
\Big\downarrow \omega_1,\omega_3\to\infty & \Big\downarrow \omega_1,\omega_3\to\infty \\
\wp_{rat}(z) = \frac{1}{z^2} & Z_{rat}(u;v) = \frac{1}{u-v} - \frac{1}{u} + \frac{1}{v}
\end{array}$$

3 rational case の積分

周期を２つとも無限大に飛ばしてトーラスを退化させると, ハミルトニアン $H, K/t$ も有理関数となる. このとき双有理な変換によって, この系の積分を求めることが出来てしまう. すなわち ii)rational case では (@１),(@２) ともに積分が得られる. 以下に示す通りこの積分は正準変数の有理関数であって, さらに正準変換を繰り返すと多項式形の積分にまで変形できる.

3.1 rational case の有理関数形積分

補題 ハミルトン系

$$\frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j} \quad , \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

において, ハミルトニアンが時間だけの関数 $f(t)$ と, 時間を陽に含まない関数 $g(\overrightarrow{q}, \overrightarrow{p})$ とに因数分解できる, すなわち

$$H = f(t) g(\overrightarrow{q}, \overrightarrow{p})$$

と書けるならば, 関数

$$f(t)^{-1} H = g(\overrightarrow{q}, \overrightarrow{p})$$

は当該ハミルトン系の積分である. (ただし $\overrightarrow{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$, $\overrightarrow{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ と略記した.)

なぜなら

$$\frac{\partial g(\overrightarrow{q}, \overrightarrow{p})}{\partial t} = 0$$

および解析力学でよく使う式

$$\frac{\partial H}{\partial q_j}\frac{dq_j}{dt} + \frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{dp_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q_j}\frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial q_j} = 0$$

を用いれば

$$\begin{aligned}
\frac{d\{f(t)^{-1}H\}}{dt} &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\{f(t)^{-1}H\}}{\partial q_j}\frac{dq_j}{dt} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\{f(t)^{-1}H\}}{\partial p_j}\frac{dp_j}{dt} + \frac{\partial\{f(t)^{-1}H\}}{\partial t} \\
&= \frac{1}{f(t)} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial q_j}\frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial q_j} \right) + \frac{\partial g(\overrightarrow{q}, \overrightarrow{p})}{\partial t} \\
&= 0
\end{aligned}$$

となるからである.(補題の証明終わり.)

よって t の関数を H, K から括り出すことが出来れば, 残りの (t を陽に含まない) 因子は積分になっている.

rational case のハミルトン系 (@ 1),(@ 2) に以下のような正準変換：

$$\lambda_1 = t\lambda_3 \quad , \lambda_2 = t\lambda_4 \quad , \mu_1 = \frac{\mu_3}{t} \quad , \mu_2 = \frac{\mu_4}{t}$$

を行うことで得られるハミルトニアンを H_1, K_1 と書くと

$$H_1 = H - \frac{\mu_3\lambda_3 + \mu_4\lambda_4}{t}$$

$$K_1 = \frac{K}{t} - \frac{\mu_3\lambda_3 + \mu_4\lambda_4}{t}$$

であるが, このとき上記補題により次のことがいえる.

定理　ハミルトン系 (@ 1) から, 上記の正準変換で得られるハミルトニアンを H_1 とするとき, 関数 tH_1 は当該ハミルトン系の積分である.

定理　(K.Okamoto)　ハミルトン系 (@ 2) から, 上記の正準変換で得られるハミルトニアンを K_1 とするとき, 関数 tK_1 は当該ハミルトン系の積分である.

3.2 rational case の多項式形積分

定理　正準変換により, 積分 tH_1 は次の多項式形の積分 tH_2 に変換される:

$$\begin{aligned} tH_2 &= x(x-y)\{(1+y-4x)\xi - 2y\eta\}\xi \\ &+ 2\alpha x\{(1-2x)\xi - y\eta\} \\ &+ 2\beta y\{(3x-y-1)\xi + y\eta\} \\ &+ x\xi - y\eta. \end{aligned}$$

合流型に関しては岡本氏により以下の結果が得られている.

定理　(K.Okamoto)　正準変換により, 積分 tK_1 は次の多項式形の積分 tK_2 に変換される:

$$\begin{aligned} tK_2 &= x^2\{(1-4x)\xi - 2y\eta\}\xi \\ &+ \{\beta x(1-2x) - \alpha y(1-3x)\}\xi \\ &- (\beta x - \alpha y)y\eta \\ &+ x\xi - y\eta. \end{aligned}$$

また積分のレベルでの退化については

定理 (K.Okamoto) 上記２つの積分は次のように退化する:

$$tH_2 \quad \longrightarrow \quad tK_2$$
$$y := \epsilon y$$
$$\eta := \epsilon^{-1}\eta$$
$$2\beta := \epsilon^{-1}\alpha$$
$$2\alpha := \beta$$
$$\epsilon \to 0.$$

記号の意味は明らかであろう. 証明は省略する.

4 発展方程式形の表示と対称性

本節では系(@１)の構造が見やすくなるように, 新たな記号を導入して若干の整理を行う.

記号 便宜のため従前のものも含めて掲げる.

$$x := \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \quad , y := \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} - t \quad , s := \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}$$

$$v := H = M\{({\mu_1}^2 - {\mu_2}^2) + (\mu_1 + \mu_2)N - P\}$$
$$u := G = M\{({\mu_1}^2 - {\mu_2}^2) + (\mu_1 + \mu_2)L - P\}$$
$$N = Z(\lambda_1; \lambda_2) = Z(x + s; x - s)$$
$$L := Z(\lambda_1 - t; \lambda_2 - t) = Z(y + s; y - s)$$
$$M^{-1} = N - L$$
$$P = a_0 Q + a_1 R$$
$$Q := \wp(\lambda_1) - \wp(\lambda_2) = \wp(x + s) - \wp(x - s) = \dot{N}$$
$$R := \wp(\lambda_1 - t) - \wp(\lambda_2 - t) = \wp(y + s) - \wp(y - s) = \dot{L}$$
$$\dot{} := \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$$
$$Z(\lambda, \mu) = \zeta(\lambda - \mu) - \zeta(\lambda) + \zeta(\mu)$$

ちなみにこのとき

$$H - G = v - u = \mu_1 + \mu_2$$

である.

命題　ハミルトン系 (@ 1) は発展方程式系 (@ 4):

$$\frac{dx}{ds} = \frac{vM^{-1} + P}{(v-u)^2}$$

$$\frac{dy}{ds} = \frac{uM^{-1} + P}{(v-u)^2}$$

$$\frac{dv}{ds} = -\frac{vR - a_1\dot{R}}{v-u}$$

$$\frac{du}{ds} = -\frac{uQ + a_0\dot{Q}}{v-u}$$

に変形できる.

証明は [Sasaki 1999] を見られたい. この変換は正準変換ではないのだが, 次のような構造をもつ. 容易に確かめられるので証明は略す.

命題

$$J_1 = \frac{vN - a_0\dot{N}}{v-u} - \frac{vL - a_1\dot{L}}{v-u}$$

$$J_2 = \frac{uN - a_0\dot{N}}{u-v} - \frac{uL - a_1\dot{L}}{u-v}$$

とおくと, 上記の発展方程式系 (@ 4) は

$$\frac{dx}{ds} = \frac{\partial J_1}{\partial u} \quad , \frac{dy}{ds} = \frac{\partial J_2}{\partial v}$$

$$\frac{dv}{ds} = \frac{\partial J_1}{\partial y} \quad , \frac{du}{ds} = \frac{\partial J_2}{\partial x}$$

となる.

注意　このとき

$$J_1 + J_2 = N - L = M^{-1}.$$

また u と v,N と L を入れ換えると J_1 と J_2 が入れ換わる.

参考文献

[安藤 1970]　安藤四郎，楕円積分・楕円関数入門, 日新出版 (1970).

[Iwasaki 1991]　K. Iwasaki , *Moduli and deformation for Fuchsian projective connections on a Riemann surface* , J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. 38(1991),431-531.

[Kawai 1995]　S. Kawai , *Thesis* , the Univ. of Tokyo(1995).

[Okamoto 1987] K. Okamoto , *The Hamiltonian structure derived from the holonomic deformation of the linear ordinary differential equations on an elliptic curve* , Sci. Papers College Arts Sci. Univ. Tokyo 37(1987),1-11.

[Sasaki 1999] Y. Sasaki , *Master's thesis* , the Univ. of Tokyo(1999).

[竹内 1936] 竹内端三，楕円函数論，岩波書店 (1936).